和

令和５年４月入学

東北大学大学院工学研究科
量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学A　MATHEMATICS A

令和５年２月 28 日(火) 10:00 － 11:30

注　意

1．本試験問題冊子は，試験監督の指示があるまで開かないこと．

2．試験問題冊子，答案用紙および草案用紙が配布されるので，答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること．

3．全ての問題を解答すること．

4．試験終了後，提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること．答案用紙を番号順に草案用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き，試験監督の回収を待つこと．試験監督の指示があるまでは退席しないこと．

数 学 A　MATHEMATICS A

1．a を正の定数とするとき，xy平面において t を媒介変数として，

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

で表される曲線を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この曲線をxy平面上に図示せよ．

(2) この曲線の長さ l を求めよ．

(3) この曲線とx軸が囲む領域 D の面積を求めよ．

数 学 A　MATHEMATICS A

2.　三次元デカルト座標系 (x, y, z) において，ベクトル $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = (x^3 + 3y + z)\boldsymbol{i} + (5x + y^3 + 3z)\boldsymbol{j} + (2x + y + z^3)\boldsymbol{k}$$

により与えられる．ただし，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の基本ベクトルである．また，曲面 S が

$$S = \{\,(x, y, z) \mid\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 1\}$$

により与えられる．さらに，三次元極座標系は(r, θ, ϕ)で表されるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$, $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を三次元デカルト座標系で求めよ．

(2) 曲面 S を図示せよ．また，三次元極座標系において，S 上の点が取る θ の範囲を求めよ．

(3) 曲面 S 上の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，θ，ϕ を用いて表せ．

(4) 曲面 S の面積は,

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \boxed{\quad ① \quad}\, d\theta$$

で与えられる．ただし，$\theta_{\max}$ および$\theta_{\min}$ は，それぞれ問(2)において求めたθ の最大値および最小値である．$\boxed{\quad ① \quad}$ に入る式を書け．さらに曲面 S の面積を求めよ．

(5) 面積分 $\int_S \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は z 成分を正とする S の単位法線ベクトルである．さらにストークスの定理より線積分 $\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．ただし，C は S の周回である．

数 学 A　MATHEMATICS A

3. 3×3の行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ.

(1) 行列$\boldsymbol{A}$の固有値を，固有値方程式から求めよ.

(2) 次の３つのベクトルが，行列$\boldsymbol{A}$の固有ベクトルになっていることを示せ.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 問(2)のベクトルを利用して，互いに直交する固有ベクトルを求めよ.

(4) 行列$\boldsymbol{D}$を3×3の対角行列，行列$\boldsymbol{P}$を3×3の行列とする. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$となる行列$\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{P}$を求めよ.

(5) $\boldsymbol{A}^n$を求めよ.