

令和元年度 秋季募集
(令和2年4月入学)
東北大学大学院量子エネルギー工学専攻入学試験
試験問題冊子

数学A MATHEMATICS A

令和元年 8月27日(火) 9:30 - 11:00

注 意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること。
3. 全ての問題を解答すること。問題ごとに2枚の答案用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{2x}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

(2) 次の定積分を求めよ.

$$\int_1^3 \frac{x^2}{x^2 - 4x + 5} dx$$

(3) 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx$$

2. 3×3 行列 A が次のように与えられる.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) A の逆行列を求めよ.
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (3) $A^3 + aA^2 + bA + cI = O$ を満たす係数 a, b および c を求めよ. ただし, I および O はそれぞれ単位行列および零行列である.
- (4) $A^4 - 6A^3 + 7A^2 - 8A + 2I$ を求めよ.

数学 A MATHEMATICS A

3. デカルト座標系 (x, y, z) において, ベクトル場 \mathbf{A} が

$$\mathbf{A} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbf{k}$$

により与えられる. ただし, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ x, y, z 方向の基本ベクトルである. S を次の領域

$$V = \{ (x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, 0 \leq z \leq c \}$$

の表面とする. ただし, a, b, c は $0 < a < b$ および $c > 0$ を満たす実数である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を求めよ.

(2) $\nabla \times \mathbf{A}$ を求めよ.

次に, 図1のように円筒座標系 (r, θ, z) を導入し, r, θ, z 方向の基本ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ とする. 以下の問いに答えよ.

(3) \mathbf{i} および \mathbf{j} を円筒座標系で表せ.

(4) \mathbf{A} を円筒座標系で表せ.

(5) 積分

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ. ただし, \mathbf{n} は S の外向き単位法線ベクトルである.

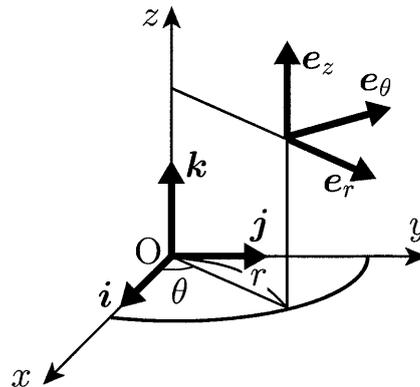


図 1

令和元年度 秋季募集
(令和2年4月入学)
東北大学大学院量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子

数学B MATHEMATICS B

令和元年 8月27日(火) 13:30 - 15:00

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙および草案用紙が配布されるので、答案用紙および草案用紙に受験番号を記入すること。
3. 全ての問題を解答すること。問題ごとに2枚の答案用紙を用いること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号の記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

1. 次の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} = (y - 4x + 1)^2$$

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$$

$$(3) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = \log x \quad (x > 0)$$

2. 関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ および逆変換を次のように定義する.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

以下の問いに答えよ.

(1) 次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を三角関数を用いて表せ.

$$f(x) = \begin{cases} -x & (0 < x \leq 1) \\ x - 2 & (1 < x \leq 2) \\ 0 & (x \leq 0, x > 2) \end{cases}$$

(2) 問 (1) で求めた $F(\omega)$ を用いて $|F(\omega)|^2$ を求めよ.

(3) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx$ を利用して, $\int_0^{\infty} \frac{(\cos x - 1)^2}{x^4} dx$ を求めよ.

3. 関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義する.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

以下の問いに答えよ.

(1) 次の関係式を導け.

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s') ds'$$

ただし, $f(t)$ は $\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = 0$ を満たすものとする.

(2) $\sin^2 t$ のラプラス変換を求めよ.

(3) $\frac{\sin^2 t}{t}$ のラプラス変換を求めよ.

(4) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-2t} \sin^2 t}{t} dt$ の値を求めよ.

令和元年度 秋季募集
(令和2年4月入学)
東北大学大学院量子エネルギー工学専攻入学試験

試験問題冊子
【専門科目】

熱力学	THERMODYNAMICS	P1~P2
流体力学	FLUID DYNAMICS	P3~P4
材料力学	STRENGTH OF MATERIALS	P5~P6
機械力学	DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS	P7~P8
制御工学	CONTROL ENGINEERING	P9~P10
材料物性学	MATERIALS SCIENCE	P11~P12
電磁気学	ELECTROMAGNETICS	P13~P14
量子力学	QUANTUM MECHANICS	P15~P16

令和元年 8 月 28 日(水) 9:00 – 12:00

注意

1. 本試験問題冊子は、試験監督の指示があるまで開かないこと。
2. 試験問題冊子、答案用紙、草案用紙および選択票2枚が配付されるので、答案用紙、草案用紙および選択票に受験番号を記入すること。
3. 8科目の中から2科目を選択して、選択した科目の問題すべてについて解答すること。選択した科目を選択票に記入すること。1科目に2枚綴1組を使用すること。各科目とも1問につき1枚の答案用紙を使用すること。
4. 試験終了後、提出にあたっては受験番号、問題番号などの記入を再確認すること。答案用紙を番号順に他の用紙の上に重ねて問題冊子の横に置き、試験監督の回収を待つこと。試験監督の指示があるまでは退席しないこと。

熱力学 THERMODYNAMICS

1. 純物質 A および B のそれぞれについて、両側の端点を含む気液平衡線（蒸発曲線）を $\ln p - \frac{1}{T}$ 線図上に示す（図 1）。ただし、 p は圧力、 T は温度であり、 \ln は自然対数を表す。以下の問いに答えよ。

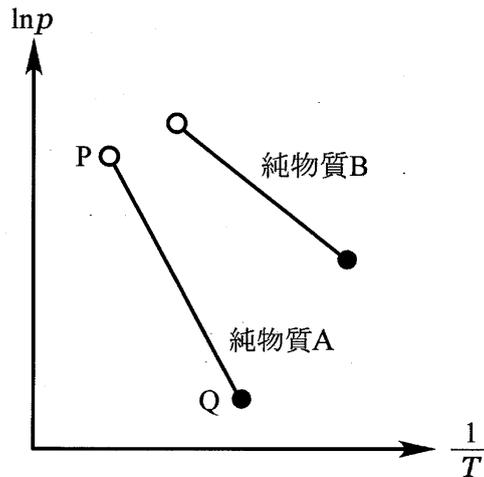


図 1

- (1) 端点 P および Q の名称を示せ。
- (2) 気液平衡状態を保ちながら圧力と温度が変化するとき、次式が成立することを示せ。ここで、 s_G と v_G はそれぞれ気相の比エントロピーと比体積であり、 s_L と v_L はそれぞれ液相の比エントロピーと比体積である。

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_G - s_L}{v_G - v_L}$$

- (3) 問 (2) で示した $\frac{dp}{dT}$ を v_G , v_L , T および単位質量あたりの蒸発潜熱 r を用いて示せ。
- (4) 純物質 A と B の分子量が等しいとき、どちらの物質の単位質量あたりの蒸発潜熱が大きいかを理由を付して説明せよ。ただし、気相の比体積が液相のそれに対して十分に大きく、気相は理想気体の状態方程式に従うとする。また、純物質 A と B の蒸発潜熱はそれぞれ一定としてよい。

熱力学 THERMODYNAMICS

2. 閉じた系における理想気体によるサイクルを考える. このサイクルは3つの準静的過程からなり, 状態1→2の過程は断熱圧縮過程, 状態2→3の過程は等圧加熱過程, 状態3→1の過程は等積冷却過程である. 状態1の温度を T_1 , 比エントロピーを s_1 , 状態2の温度を T_2 , 状態3の温度を T_3 , 比エントロピーを s_3 とする. また, この理想気体の比熱比を κ , 気体定数を R とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) この気体の定積比熱および定圧比熱を κ , R を用いて表せ.
- (2) このサイクルの温度-比エントロピー (T - s) 線図を描け.
- (3) 状態3→1の過程における比エントロピー変化 $s_1 - s_3$ を T_1 , T_3 , κ , R を用いて表せ.
- (4) 状態3の温度 T_3 を T_1 , T_2 , κ を用いて表せ.
- (5) 状態1→2の過程の圧縮比が ε のとき, このサイクルの熱効率を ε , κ を用いて表せ.

流体力学 FLUID DYNAMICS

1. 以下の複素速度ポテンシャル $W(z)$ により表される, 非粘性・非圧縮性流体の二次元定常ポテンシャル流れを考える.

$$W(z) = Uz - m \log z$$

ここで, U および m は正の実数, \log は自然対数である. z は $z = x + iy = re^{i\theta}$ で表される複素変数であり, x および y はデカルト座標, r および θ はそれぞれ半径方向および周方向の極座標で, $i = \sqrt{-1}$ である. 以下の問いに答えよ.

- (1) この流れ場における速度ポテンシャル $\phi(r, \theta)$ と流れ関数 $\psi(r, \theta)$ を求めよ.
- (2) この流れ場におけるよどみ点の座標を求めよ.
- (3) よどみ点を通る流線が y 軸と交わる点の座標を求めよ.
- (4) この流れ場の流線を描き, 矢印で流れ方向を図示せよ.
- (5) 上流無限遠方での圧力は p_∞ , 流体の密度は ρ で一定としたとき, よどみ点における圧力を求めよ. また, x 軸上における圧力の分布を図示せよ.

流体力学 FLUID DYNAMICS

2. 図1のような, 原点Oを中心とする半径 a, b の2つの同心円筒があり, 内側の円筒は静止し, 外側の円筒は一定の角速度 Ω で回転している. このとき, 円筒の間を占める非圧縮粘性流体は二次元定常の周方向流れとなった. 外力は無視でき, 密度 ρ ならびに粘性係数 μ が一定として, 次の問いに答えよ.

(1) 図1に示す円筒座標系 (r, θ) を用いると, 定常 Navier-Stokes 方程式の半径方向成分は

$$u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right)$$

周方向成分は

$$u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right)$$

となる. ここで, p, u_r および u_θ はそれぞれ圧力, 速度の半径方向成分および速度の周方向成分である. u_r が0であり, u_θ および p が r のみの関数であると仮定したとき, 以下の問いに答えよ.

- a) 半径方向成分の式から r, ρ, p および u_θ の関係式を導け.
- b) 周方向成分の式から u_θ と r の関係式を導け.

- (2) 問(1)のa)で得られた関係式は, $u_\theta \neq 0$ のとき圧力勾配が生じることを示している. この圧力勾配の原因を簡潔に述べよ.
- (3) 問(1)のb)で得られた関係式より u_θ を a, b, Ω, r を用いて表せ. ここで関係式は $u_\theta = Cr^k$ の形の特殊解を有する. ただし, C および k は定数である.
- (4) 内側の円筒表面に作用するせん断応力 τ を a, b, Ω, μ を用いて表せ.
- (5) 内側の円筒にかかる単位軸長さあたりのトルク T を a, b, Ω, μ を用いて表せ.

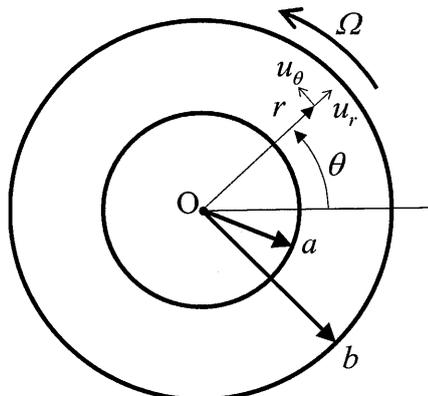


図1

材料力学 STRENGTH OF MATERIALS

1. 図1に示す段付き中実丸軸 ABC を考える. この軸は, 軸左端 A から段部 B までの直径は $2d$, 長さは L , 段部 B から軸右端 C までの直径は d , 長さは L であり, 軸左端 A で鉛直剛体壁に固定されている. 軸のせん断弾性係数は G とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 図1(a)に示すように, 位置 B にねじりモーメント M_1 を, 位置 C に M_1 とは逆向きにねじりモーメント M_2 をそれぞれ作用させる. 軸右端 C におけるねじれ角 ϕ_C を求めよ.
- (2) 問(1)において, 最大せん断応力の値を求め, その発生位置を示せ.
- (3) 図1(b)に示すように, 軸右端 C において, 軸の中心を通る水平線と丸軸表面との交点をそれぞれ D, F とする. 長さ h , 断面積 S , 縦弾性係数 E の2つの棒が, 点 D, F と水平剛体床にそれぞれ垂直にピン接合されている. 位置 B にねじりモーメント M_1 を作用させたとき, 軸右端 C に生じる反ねじりモーメント M_C とねじれ角 ϕ_C を求めよ.

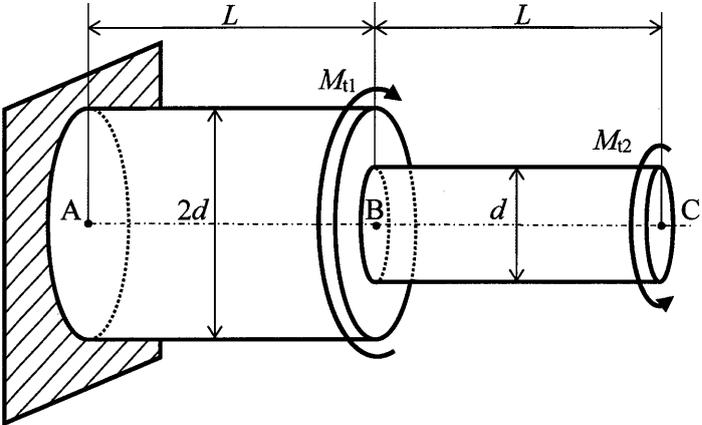


図1(a)

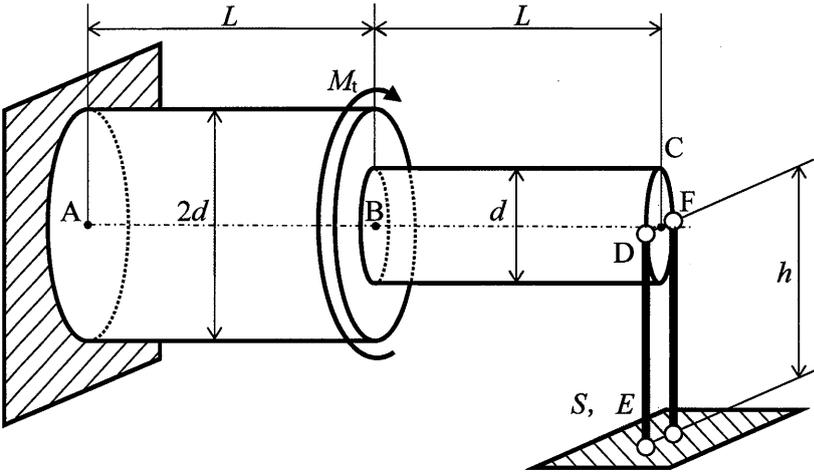


図1(b)

材料力学 STRENGTH OF MATERIALS

2. 図 2(a)上面図に示すように、端 A_1, A_2, D でそれぞれ垂直剛体壁に固定され、端 B_1, B_2, C に穴を有するはり A_1B_1, A_2B_2, CD がある。図 2(b)側面図に示すように、はり A_1B_1, A_2B_2 とはり CD の中立軸は上下に距離 d ($d \ll L$) だけ離れている。はり A_1B_1, A_2B_2 の長さは $2L$ 、はり CD の長さは L であり、はり A_1B_1, A_2B_2, CD の曲げこわさ EI はそれぞれ一定とする。穴の中心が一直線上になるようにはり CD に鉛直方向上方に外力を加えてたわませ、穴にピンを通して固定する。外力を解放すると、はり A_1B_1, A_2B_2, CD はつりあいを保った位置で静止する。ただし、ピンと穴の変形や摩擦は無視するものとし、ピンと穴の各直径は一致しているものとする。また、各はりの自重と中立軸の伸縮は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 端 B_1 と B_2 におけるたわみ δ を求めよ。
- (2) はり A_1B_1 の端 B_1 におけるたわみ角 ϕ_{B_1} とはり CD の端 C におけるたわみ角 ϕ_C をそれぞれ求めよ。
- (3) 端 D における反力 R_D を求めよ。
- (4) 端 D における反モーメント M_D を求めよ。

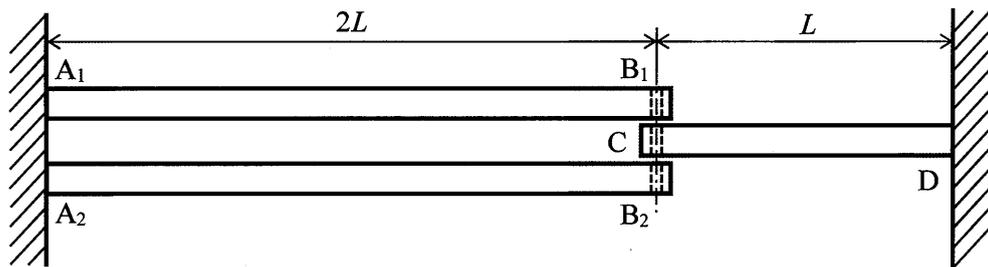


図 2(a) 上面図

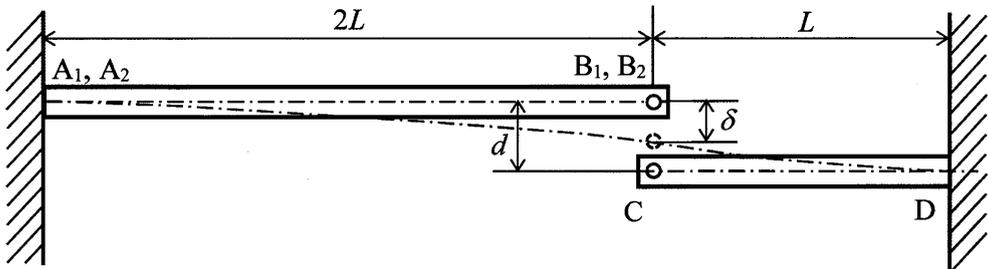


図 2(b) 側面図

機械力学 DYNAMICS OF MECHANICAL SYSTEMS

1. 図1に示すような、質量 m 、長さ $a+b$ の一様な剛体棒、ばね定数 k と $2k$ のばね、および粘性減衰係数 c のダッシュポットからなる振動系を考える。剛体棒は O 点でピン支持されており、図の面内で釣り合い位置を中心に微小回転振動する。剛体棒の釣り合い位置からの回転角を $\theta(t)$ とし、 t は時間とする。ダッシュポットは天井に接続され、天井は強制変位 $u(t) = A \sin \omega t$ で垂直方向に加振されている。ただし、 A は強制変位の振幅、 ω は角振動数である。ばねおよびダッシュポットの質量は無視できるものとする。系の応答が定常状態であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 棒の O 点まわりの慣性モーメント J を求めよ。
- (2) 系の運動方程式を求めよ。
- (3) $c = 0$, $a = 2\ell$, $b = \ell$ のとき、系の固有角振動数を求めよ。
- (4) $c \neq 0$, $a = 2\ell$, $b = \ell$ のとき、回転角 $\theta(t)$ を求めよ。

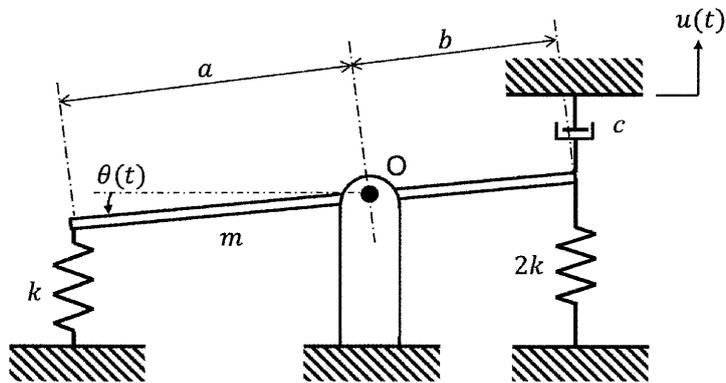


図 1

2. 図2に示すような半径 r_1, r_2 , 慣性モーメント J_1, J_2 の2つのプーリー, ばね定数 k_1, k_2, k_3 の3つのばねからなる振動系を考える. 2つのプーリーの回転中心は固定されており, 3つのばねは糸で連結されている. 糸は緩まず, 糸とプーリーの間には滑りがないものとする. ばねと糸の質量は無視できる. プーリーの釣り合いの位置からの回転角はそれぞれ θ_1, θ_2 である. 以下の問いに答えよ.

- (1) 系の運動方程式を求めよ.
- (2) 系の振動数方程式を求めよ.
- (3) $J_1 = J, J_2 = 4J, r_1 = r, r_2 = 2r, k_1 = k_2 = k_3 = k$ のとき, 系の固有角振動数を求めよ.
- (4) 問(3)で求めた各固有角振動数における θ_1 と θ_2 の振幅比を求めよ.

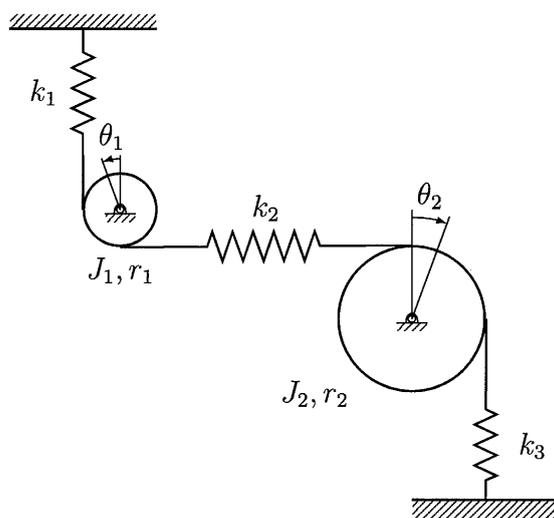


図 2

制御工学 CONTROL ENGINEERING

1. 以下の問いに答えよ.

(1) 伝達関数が次式で与えられるとき, インパルス応答を求めよ.

$$G(s) = \frac{7s + 15}{s(s + 3)(s + 5)}$$

(2) 図1の制御系を考える.

- a) 制御系を安定とする k の範囲を求めよ.
- b) 制御系の根軌跡を描け.
- c) $k = 16$ のとき, ゲイン余裕の値を計算せよ.

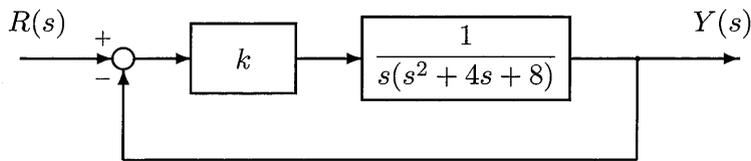


図1

(3) 周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のベクトル軌跡が図2で表されるとき, 入力 $\sin(\omega_0 t)$ に対する出力を求めよ.

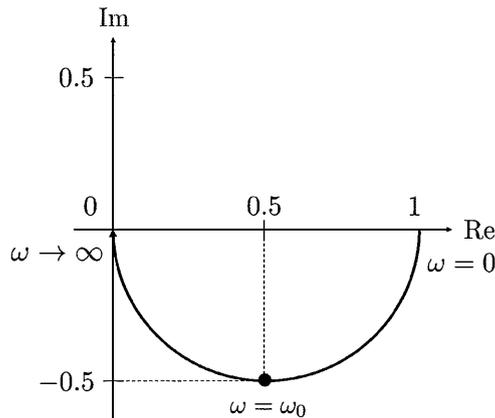


図2

(4) 図3に示すシステムを考える. 外乱 $d(t) = t$ と入力 $r(t) = 0$ に対して定常値 $|y(\infty)| < 0.5$ となるための k の範囲を求めよ.

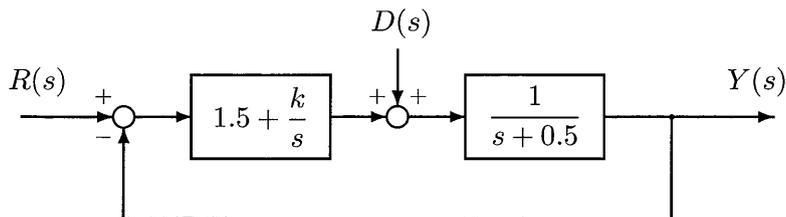


図3

制御工学 CONTROL ENGINEERING

2. 以下の問いに答えよ.

(1) 以下の式で表されるシステムを考える.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$$

ただし $u(t)$ は入力, $y(t)$ は出力であり, 状態ベクトルを $\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2]^T$ とする.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [1, 2]$$

のとき, 状態フィードバック $u(t) = -\mathbf{k}\mathbf{x}(t)$ によって閉ループ系を安定にする $\mathbf{k} = [k_1, k_2]$ の範囲を求めよ.

(2) 問 (1) において $\mathbf{k} = [9, 7]$ とする. 閉ループ系を対角化する座標変換 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}(t)$ と, 対角化されたシステム $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{z}(t)$ を求めよ.

(3) 以下の式で表されるシステムを考える.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{z}(t) + \mathbf{g}v(t), \quad y(t) = \mathbf{h}\mathbf{z}(t)$$

ただし $v(t)$ は入力, $y(t)$ は出力であり, 状態ベクトルを $\mathbf{z}(t) = [z_1, z_2]^T$ とする.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = [-1, -3]$$

であり, 初期状態を $\mathbf{z}(0) = [0, 0]^T$ とするとき, 単位ステップ応答を求めよ.

(4) 問 (3) のシステムに対し図 4 に示すような偏差積分フィードバック $v(t) = \lambda\xi(t)$ を考える. ここで λ は定数ゲイン, $r(t)$ は入力, $y(t)$ は出力である.

a) $[z_1, z_2, \xi]^T$ を状態ベクトルとする拡大系の状態方程式を導出せよ.

b) このシステムが安定となる λ の範囲を求めよ.

c) 単位ステップ入力に対する定常偏差 $e(\infty)$ の値を求めよ.

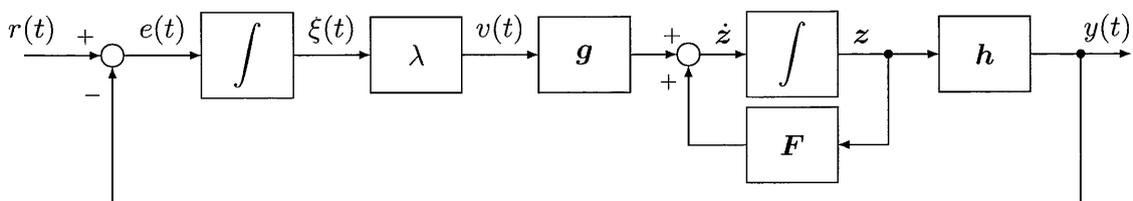


図 4

1. 材料の破壊に関して、次の問いに答えよ。

- (1) 常温におけるアルミニウムとアルミナの代表的な破壊までの引張応力-ひずみ線図を描け。応力とひずみの具体的な数値は必要ない。これらの材料の破壊モードの違いについて、引張応力-ひずみ線図に基づいて説明せよ。
- (2) カップ・アンド・コーン破断面の形成過程を模式図とともに説明せよ。
- (3) 図1に示すように、長さ 6.4 mm のき裂を含む無限平板が、遠方においてき裂に垂直な方向の一様応力 100 MPa を受けている。このときの応力拡大係数 K_I を求めよ。小数点一位以下は四捨五入せよ。
- (4) 図2に示すように、長さ $2a$ のき裂が左右に Δa ずつ進展したと仮定すると、き裂面における単位厚さあたりの表面エネルギー変化 $\Delta\Gamma$ は、

$$\Delta\Gamma = 4\gamma\Delta a$$

で表される。ここで、 γ は単位面積あたりの表面エネルギーである。また、弾性論により、き裂が Δa ずつ進展した場合の単位厚さあたりのポテンシャルエネルギー変化 ΔU は

$$\Delta U = -\frac{2\pi\sigma^2 a}{E} \Delta a$$

で表される。ここで、 E はヤング率である。これらき裂進展とエネルギー変化の関係から、塑性変形に費やされるエネルギーを無視した場合のき裂が進展しないための限界応力 σ_{cr} の式を示せ。

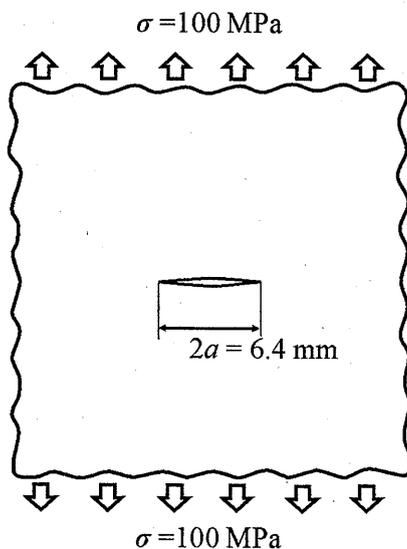


図 1

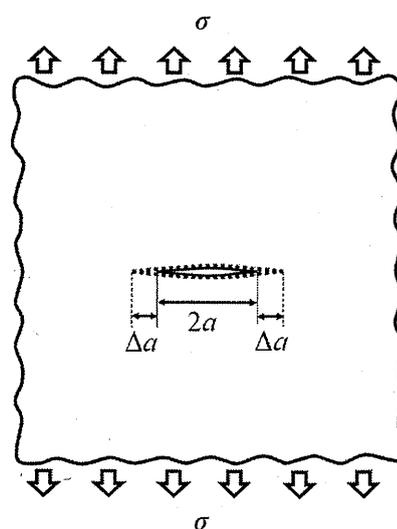


図 2

2. 固体内の拡散について次の問いに答えよ.

(1) 文章の内容が一般的な説明として誤っているものを以下の(i)~(v)から2つ選び、それぞれについて不適切な箇所を指摘し、誤っている理由を記述せよ.

- (i) 固体中原子の拡散係数は、固有の振動因子と拡散の活性化エネルギーを含む温度の関数で表され、拡散流束はこれに比例する.
- (ii) 鉄中で、置換型溶質原子は侵入型溶質原子より大きな拡散係数をもち、より低温から拡散が可能である.
- (iii) 原子炉で中性子照射され多数の格子欠陥が導入された金属中では、照射される前に比べて自己拡散係数が大きくなる.
- (iv) 温度の逆数に対して拡散係数を対数プロットし、直線近似できる結果であれば、その傾きと気体定数から拡散の活性化エネルギーを見積もることができる.
- (v) 金属材料における定常クリープ状態では、転位の運動によって一定のひずみ速度で変形するため、固体内の原子の拡散はこの現象に寄与することはない.

(2) 図3に示すように、管をある金属の板(厚さ: 1.0 mm)で2つに仕切った系を考える. この管の左側は水素分圧 $1.0 \times 10^4 \text{ Pa}$ に、管の右側は $1.0 \times 10^2 \text{ Pa}$ で一定に保たれているものとする. 系の温度は 300°C で一定とする. このとき、単位時間当たりに仕切りの金属板を通して漏れ出てくる水素ガス量を測定し、この金属における水素原子の拡散係数を調べる. 水素原子の拡散に関わる金属板の仕切り部分の面積は 10 mm^2 で、水素原子の管壁の透過は無視できるものとする. 拡散が定常状態に達したとき、低圧側に出てきた水素の量は、水素の原子数に換算して $2.0 \times 10^{16} \text{ atoms} \cdot \text{s}^{-1}$ であった. 次の問いに答えよ. ここで、この仕切り板の金属は FCC 構造をもち、その格子定数は 0.40 nm とする. また、水素分圧 $p_{\text{H}_2} (\text{Pa})$ での水素ガスに接した金属表面直下の水素原子の固溶濃度 $C_{\text{H}} (\text{at}\%)$ は、 $C_{\text{H}} = K_{\text{S}} \sqrt{p_{\text{H}_2}}$ で表されるものとする. なお、 K_{S} は金属中の水素の溶解度係数であり、この金属の場合、 300°C での K_{S} は $2.0 \times 10^{-4} \text{ Pa}^{-1/2}$ とする.

- a) このときの金属板中の板厚方向の水素原子の濃度分布を図示せよ.
- b) この金属板中の水素原子の流束を求めよ.
- c) この金属中の水素原子の拡散係数を求めよ.

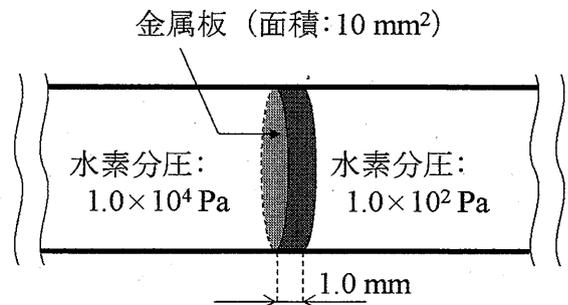


図 3

1. 図1に示すように、半径 a の球Aがある。球Aの中心から距離 $4l$ および $5l$ を隔てた一直線上の点Bおよび点Cを考える($l > a$)。次の問いに答えよ。ただし、誘電率を ϵ_0 とする。

- (1) 電場に関するガウスの法則を積分形で記せ。
- (2) 球A内に電荷 Q_A が一様密度で分布すると考える。このときの静電場の大きさ $E(r)$ および静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。さらに、 $E(r)$ および $\phi(r)$ を図示せよ。ただし、 r は球Aの中心からの距離とする。
- (3) 問(2)の条件に加え、点B、Cに点電荷 q_B 、 q_C を置くとき、点電荷 q_C に作用する力の大きさを求めよ。
- (4) 問(3)において、点電荷 q_C に作用する力がゼロとなるときの条件を求めよ。

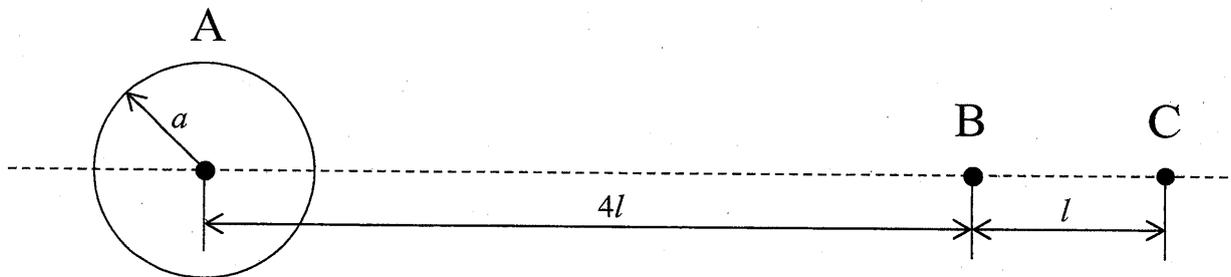


図1

電磁気学 ELECTROMAGNETICS

2. 図2のように、円筒座標系 (r, θ, z) において、半径 a で z 軸を中心軸とする無限長ソレノイドコイルと、中心を原点 O とし $z = 0$ 平面上にある半径 b ($b > a$) の円形コイル C を考える。無限長ソレノイドコイルには z 軸方向単位長さ当たり周方向電流 i_θ が一様に流れているものとする。次の問いに答えよ。ただし、透磁率を μ_0 とする。

- (1) 無限長ソレノイドコイル外 ($r > a$) での磁束密度 \mathbf{B} は $\mathbf{0}$ になることを使い、無限長ソレノイドコイル内 ($r < a$) では磁束密度 \mathbf{B} は空間的に一様であることを示せ。さらに、磁束密度 \mathbf{B} の向きと大きさを求めよ。
- (2) コイル C を貫く磁束 Φ を求めよ。
- (3) 問 (2) で求めた磁束 Φ と磁気ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の関係を示し、無限長ソレノイドコイル内外 ($r < a$ および $r > a$) での磁気ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を求めよ。ただし、磁気ベクトルポテンシャル \mathbf{A} は θ 方向成分のみを持つものとする。
- (4) 無限長ソレノイドコイルに流れる電流 i_θ が時刻 t ($0 < t < t_1$) とともに $i_\theta = i_0(1 - t/t_1)$ と変化するとき、コイル C に流れる誘導電流 I の大きさと向きを求めよ。ただし、 i_0, t_1 は定数、コイル C の抵抗を R とし、誘導電流 I が作る磁束密度は無視できるものとする。

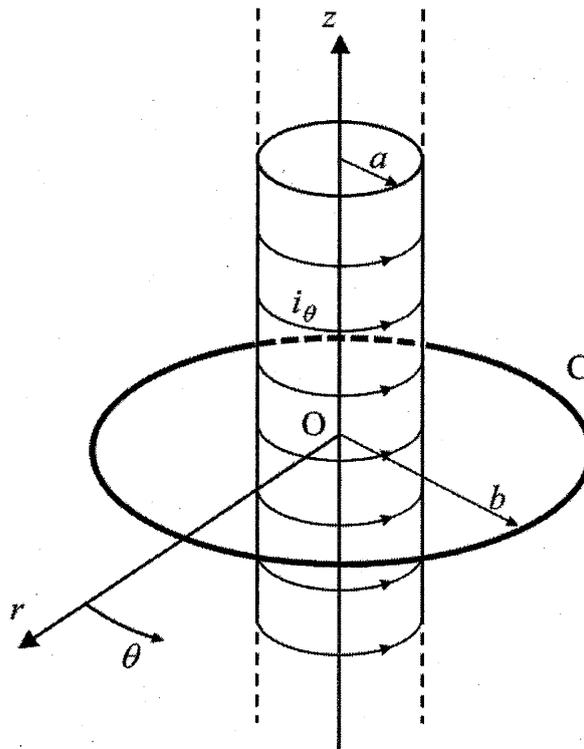


図2

1. 次の問いに答えよ. ただし, プランク定数を h とする.

- (1) 陽子の質量および運動エネルギーをそれぞれ m_p および E_p , 電子の質量および運動エネルギーをそれぞれ m_e および E_e とする. ただし, 運動学における相対論的效果は無視できるものとする.
- a) 陽子のド・ブROI波長を h , m_p および E_p を用いて示せ.
- b) 陽子と電子が同じド・ブROI波長を持つとき, E_p と E_e の関係を求めよ.
- (2) 波長 λ , 運動量 p の光子が, 静止した自由電子に衝突し, 波長 λ' , 運動量 p' で入射方向に対して θ の角度に散乱される現象を考える. λ と λ' の関係は, $\lambda' - \lambda = [h/(m_0c)](1 - \cos\theta)$ によって表される. ここで, m_0 は電子の静止質量, c は光速である.
- a) p' を p , m_0 , c , および θ を用いて示せ.
- b) p' が最大になる θ を求めよ. また, そのときの p' を示せ.
- (3) 自由粒子(質量 m) が, ある領域に閉じ込められている. 位置と運動量の不確定性関係を用いて以下の問いに答えよ. ただし, 運動学における相対論的效果は無視できるものとする.
- a) $-a \leq x \leq a$, $-\infty \leq y \leq \infty$, $-\infty \leq z \leq \infty$ の領域に閉じ込められた自由粒子の最小の運動エネルギー E_a を求めよ.
- b) $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$, $-a \leq z \leq a$ の領域に閉じ込められた自由粒子の最小の運動エネルギー E_b を求めよ.
- c) 問a)と問b)で得られた E_b と E_a の比 (E_b / E_a) を求め, その値の物理的意味を述べよ.

量子力学 QUANTUM MECHANICS

2. 一次元空間においてポテンシャル $V(x)$ に束縛されている質量 m の粒子を考える. 時間に依存しないシュレーディンガー方程式は次のように表される.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

ここで, E は波動関数 $\varphi(x)$ の固有値であり, $\hbar \equiv h/(2\pi)$ (h : プランク定数) である. 次の問いに答えよ.

- (1) 運動量の期待値は次の式で与えられる.

$$\langle \hat{p} \rangle = \int \varphi^*(x) \hat{p} \varphi(x) dx$$

ここで, $\varphi(x)$ は規格化された波動関数であり, $\varphi^*(x)$ は $\varphi(x)$ の複素共役関数である. また, \hat{p} は運動量演算子である.

- $\varphi(x)$ の $x = \pm\infty$ における極限値がゼロである理由を説明せよ.
- 運動量演算子 \hat{p} を書け.
- 運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ を計算せよ.

- (2) 次のポテンシャルを考える.

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (V_0 > 0)$$

- $E > -V_0$ であるとき, $x > a$ および $0 \leq x \leq a$ のそれぞれの領域における波動関数を求めよ.
- 複数の定常状態が存在するための条件を求めよ.