数学Ｂ　偏微分方程式、フーリエ変換・級数、ラプラス変換　例題

１． $u(x,t)$が，偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

初期値

$$u(x,0)=f(x)$$

および境界条件

$$u(\infty,t)=u(-\infty,t)=0$$

を満足するものとする．ただし，$u(x,t)$と$f(x)$は実関数とし，また任意の区間において$f(x)$の絶対値の積分は有限であるとする．以下の問いに答えよ．

（１）$u(x,t)$は

$$u(x,t)=\int_0^\infty \{A(k)\cos(kx)+B(k)\sin(kx)\}\exp\{-k^2t\}\,dk$$

と表現されることを示せ.

（２）問（１）における$A(k)$，$B(k)$を，$f(x)$を用いて表せ．必要であればフーリエの積分公式

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)e^{-i\omega(y-x)}dyd\omega$$

およびオイラーの公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を用いよ.

（３）$f(x)$が以下のように与えられるとき，$u(x,t)$を求めよ.

$$f(x)=\begin{cases}1 & (\,|x|\le d)\\ 0 & (\,|x|>d)\end{cases}$$

（４）問（３）において$\lim_{t\to\infty}u(x,t)$の値を求めよ.

２．周期$2L$を有する関数$f(x)$のフーリエ級数展開を次のように定義する．

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

以下の問いに答えよ．

（１）上式において

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

と求められることを示せ．

（２）問（１）に示す式を用いて，周期 $2L$ を有する次の関数$g(x)$をフーリエ級数に展開せよ．

$$g(x) = x^2 \qquad (-L \le x < L)$$

（３）問（２）の結果を用いて，次の無限級数の値を求めよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

３． 関数$f(x)$のラプラス変換を次のように定義する．

$$\mathcal{L}\big(f(x)\big) = F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

以下の問いに答えよ．

（１） 以下の関数をラプラス変換せよ．また，収束域も示せ．ここで，a は定数である．

a) $\sin ax$

b) $\sinh ax$

（２） 関数$f(x)$と関数$g(x)$のたたみこみ積分$f * g$を

$$f * g = \int_0^{x} f(x-y) g(y) dy$$

と定義する．このとき，

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

となることを導け．

（３） $F(s) = \dfrac{1}{s^4 - 1}$ となる関数$f(x)$を求めよ．

４．関数$f(t)$のフーリエ変換を

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

と定義し，関数$F(\omega)$のフーリエ逆変換を

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

と定義する．このとき，パーシバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\}^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\omega)\}^2 d\omega$$

が成立することが知られている．以下の問いに答えよ．

（１）関数$g(t)$

$$g(t) = e^{-|t|}$$

をフーリエ変換せよ．

（２）問（１）の結果およびフーリエ逆変換の式を利用して関数$h(t)$

$$h(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

をフーリエ変換せよ．

（３）問（２）の結果とパーシバルの等式を用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

を計算せよ．